Hartwig Meißner

# ZUR PROBLEMATIK DES TASCHENRECHNERS IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Inhalt: Im vorliegenden Aufsatz werden nach einer kurzen Diskussion technischer Fragen Konsequenzen der Verwendung nicht programmierbarer Taschenrechner im Mathematikunterricht diskutiert. Es werden Beispiele angegeben, wie man dem sogenannten Ökonomieprinzip entsprechend durch Training von Faktenwissen und durch stärkere Betonung von Schätzen und Überschlagsrechnung einer eventuell drohenden Abhängigkeit vom Taschenrechner entgegen wirken kann. Es wird die Veränderung von Zahlbegriff und Funktionenbegriff bei erhöhter Benutzung des Taschenrechners analysiert und exemplarisch auf Möglichkeiten hingewiesen, wie der Taschenrechner einen Beitrag zur Erneuerung des Curriculums leisten könnte. (Es handelt sich hierbei um Ergebnisse eines Forschungsprojektes, das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft durch die Gewährung einer Reisebeihilfe in die USA unterstützt wurde).

## 1. Taschenrechner - Ja oder Nein?

Der Taschenrechner (Abk. TR) ist zum festen Bestandteil des täglichen Lebens geworden, ca. 50-75 % aller Familien in der Bundesrepublik besitzen mindestens einen. Auch Kinder der Primarschule haben zu Hause zunehmend Zugang zum TR, so daß sich der Mathematikunterricht aller Schulstufen auf diese Tatsache einstellen muß. Langfristig heißt die Frage deshalb nicht mehr "ob", sondern nur noch "wie" der TR eingesetzt werden soll. Hierbei liegt für uns die Betonung beim einfachen, nicht programmierbaren TR. Diese Rechner sind erheblich billiger und sehr viel einfacher zu bedienen als programmierbare Rechner, für die bereits - vor etwa 10 Jahren beginnend - eine Vielzahl didaktischer Literatur (für Mikro-, Mini- oder Tischcomputer) erschienen ist.

Für den TR-Einsatz in der Schulklasse sehen wir heute zwei Möglichkeiten. Entweder besitzt jeder Schüler seinen eigenen TR (wegen des geringen Strombedarfs mit LCD-Anzeige und Knopfbatterien), oder die Schule hat Klassensätze von wieder aufladbaren TR in Ladekoffern. Auf jeden Fall sollte der TR eine große Anzeige haben, eine sichere Bedienung der Tasten ermöglichen (Beschriftung, Größe, Druckpunkt), einen guten zuverlässigen und mehrjährig garantierten Kundendienst im Hintergrund haben (Garantiedauer mindestens ein Jahr) und die folgenden mathematischen Anforderungen erfüllen.

1.1 Automatische Konstante

Der TR sollte die sog. automatische Konstante für alle 4 Grundrechenarten besitzen. Hierbei wird beim Eintippen einer Grundrechenaufgabe $\boxed{a}$ $\boxed{*}$ $\boxed{b}$ $\boxed{=}$ (i.a.) die zweite Zahl mit Rechenzeichen gespeichert, also der Operator $*b$ , so daß anschließende Aufgaben $c * b =$ mit der verkürzten Tippfolge $\boxed{c}$ $\boxed{=}$ gelöst werden können. Auf die Bedeutung dieser Operatoreigenschaft wird später ausführlich eingegangen, bezüglich der technisch bedingten verschiedenen Realisierungen verweisen wir auf die zitierte Literatur.

1.2 Normtastatur und weitere Tasten

Als Bestandteil jedes TR schlagen wir die sog. Normtastatur vor, vgl. Abb. 1. Einfache TR sollten zusätzlich noch die Quadratwurzeltaste, eine Speicheraustauschtaste und Tasten für einen saldierenden Speicher haben. Die dann meist auch vorhandene Prozenttaste sollte z.B. bei der Aufgabe 635 + 6% = ? durch die Tastenfolge $\boxed{6}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{+}\boxed{6}\boxed{\%}\boxed{=}$ über die Zwischenanzeige 38.1 zum Ergebnis 673.1 führen. (TR mit Tasten für Winkelfunktionen und Logarithmen bezeichnen wir nicht mehr als "einfach". Diese TR werden deshalb hier nur am Rande erfaßt, vgl. (Abschnitt 9.)

## 2. TR und Ökonomieprinzip

Das menschliche Handeln scheint von einem universellen Ökonomieprinzip beherrscht zu sein, durch das in jeder Situation mit einem Minimum an Aufwand ein Maximum an Erfolg angestrebt wird. Dieses subjektive Optimierungsverfahren wird auf der einen Seite gesteuert durch Art und Umfang des gewünschten physischen und psychischen Wohlbefindens und auf der anderen Seite durch so unterschiedliche Antriebe wie z.B. körperliche Arbeit, geistiger Aufwand (meist synonym zu zeitlichem Aufwand), unmittelbare oder zukünftige Reaktionen von Mitmenschen (Lehrer, Arbeitgeber, Verwandte, Mitschüler,...), Wille zur Einordnung in eine Rangordnung, ästhetisches Empfindungsvermögen, Geschmacksrichtung oder finanzielle Kosten. Handlungen und damit Leistungen sind so keine primären Erscheinungsformen, sondern das Ergebnis eines (meist unbewußten) Kompromisses zwischen Anforderungen "von außen" und erwarteten Reaktionen von außen.

Für die Benutzung des TR lassen sich aus dem Ökonomieprinzip folgende Folgerungen ableiten.

2.1 Aufwand
Ein komplizierter TR wird weniger benutzt als ein einfacher, Leih-TR weniger als eigene. Je besser der Zugriff zum TR ist, desto weniger wird (aufwendig) schriftlich gerechnet. Kopfrechnen findet nur dann statt, wenn dies nicht "ökonomischer" mit dem TR möglich ist.

2.2 Verbot
Ein Verbot des TR reduziert seine Einsatzhäufigkeit vor allem dort, wo das Übertreten des Verbots Konsequenzen hat. Ein Verbot des TR bei Hausaufgaben ist daher wenig erfolgreich. Hieraus ergeben sich Rückkoppelungen auf eventuelle Verbote für die Schule.

2.3 Erfahrung und Einsicht
Eine Aufklärung über die Gefahren erhöht, zusätzlich zu den bereits selbst gesammelten Erfahrungen, die Einsicht und damit den Aufwand beim TR-Einsatz. Es werden häufiger Kontrollrechnungen durchgeführt.

2.4 Überdruck
Sofern durch den TR ein zu hohes Spannungsverhältnis zwischen Anforderungen und Möglichkeiten des Schülers reduziert werden kann, was i.a. zur Resignation führt, erhalten traditionelle Versager in Mathematik eine neue Chance.

2.5 Zusammenfassung
Lehre und Unterricht, die gegen das Ökonomieprinzip verstoßen, halten wir für wenig erfolgreich. Also müssen wir den TR in der Schule in all den Klassen zulassen, in denen er für die Schüler in außerschulischen Situationen zur Verfügung steht. Da die Benutzung des TR dann unmittelbare Auswirkungen auf die Rechenfertigkeiten haben wird, müssen wir durch veränderte Lehrin-

halte und Lehrmethoden und durch bewußte Aufklärung negativen Entwicklungen entgegen steuern.

## 3. TR und Rechenfertigkeit

Der einfache TR ist eine Daten-verarbeitende Maschine, die mit minimalstem Bedienungsaufwand zu einer vorgegebenen Eingabe sofort eine Ausgabe erzeugt:

EINGABE ⟶ TR ⟶ AUSGABE

### 3.1 Kopfrechnen

Durch die schnelle Reaktionszeit wird aus lerntheoretischer Sicht eine Kopplung zwischen Eingabe und Ausgabe erreicht. Der TR ist deshalb überall dort einsetzbar, wo diese Kopplung zwischen Reiz und Reaktion erwünscht ist. Dies trifft zu beim Training von Fertigkeiten, etwa beim Memorisieren des Einmaleins bzw. Einsundeins. Das Training soll eine Mechanisierung von Fähigkeiten zu Fertigkeiten erreichen, damit diese Fertigkeiten als dann nicht zu reflektierende Elementaroperationen für komplexere Aufgaben zur Verfügung stehen. Wir bringen hierzu einige Beispielaufgaben (siehe auch [1]).

#### 3.1.1 Addition und Übertrag

Aufgabe 1

Programmiere den Taschenrechner mit +9 und berechne:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) 2+9= | (b) 4+9= | (c) 9+ 3= | (d) 48+ 9= |
| 3+9= | 7+9= | 9+14= | 9+74= |
| 4+9= | 2+9= | 9+31= | 66+ 9= |
| 6+9= | 5+9= | 9+29= | 71+ 9= |
| 7+9= | 6+9= | 9+63= | 9+85= |
| 8+9= | 8+9= | 9+55= | 9+91= |

Berechne so schnell du kannst: ...

Aufgabe 2

Programmiere den Taschenrechner und berechne:

| | | |
|---|---|---|
| (a) 7+6= | (b) 17+16= | (c) 47+46= |
| 27+6= | 37+16= | 7+46= |
| 87+6= | 77+16= | 27+46= |
| 57+6= | 7+16= | 37+46= |
| 37+6= | 67+16= | 17+46= |
| 77+6= | 27+16= | |

Berechne so schnell du kannst:

| | | |
|---|---|---|
| (d) 16+27= | (e) 53- 6= | (f) 47+26= |
| 17+26= | 63-16= | 53-17= |
| 37+46= | 73-26= | 73-56= |

| | | |
|---|---|---|
| 36+47= | 73-27= | 17+36= |
| 57+26= | 13- 7= | 93-66= |
| 56+27= | 33-17= | 83-37= |
| 66+17= | 33-16= | 36+47= |
| 67+16= | 93-47= | 63-47= |
| 27+36= | 93-46= | 43-27= |
| 26+37= | 83-26= | 27+26= |

Da die Operatoren bei den Aufgaben (d) bis (f) ständig wechseln, ist eine Programmierung nicht mehr sinnvoll. Die Benutzung des Taschenrechners ist zwar weiter erlaubt, die Schüler legen ihn jedoch schnell freiwillig beiseite, da das Eintippen der gesamten Aufgabe länger dauert als das Rechnen im Kopf. Folglich schließen sich an diese Aufgabenpakete immer wieder Kopfrechenphasen an (Wettkampfspiele für die ganze Klasse).

Durch das wiederholte Üben mit dem TR als Operator werden den Schülern die notwendigen Zahlenkombinationen geläufiger. Langsam wird der TR durch das Kopfrechnen abgelöst, weil die Schüler erkennen, daß sie ohne TR schneller rechnen können. Wenn sie das Prinzip beherrschen und etliche Lösungen fest sitzen, werden sie immer seltener zum TR greifen und ihn höchstens noch zur Kontrolle einsetzen, was schwächeren Schülern durchaus gestattet sein sollte.

### 3.1.2 Multiplikation

Aufgabe 3

(a) Welche Endziffern tauchen auf, wenn ich 2+2+... so lange rechne, bis ich über 100 komme?

(b) Wie oft taucht die Endziffer 1 auf, wenn ich 3+3+... bis über 100 rechne? Wie heißen diese Zahlen? Fällt Dir etwas auf?

(c) Wie oft taucht die Endziffer 2 auf, wenn ich 3+3+3... bis über 100 rechne? Wie heißen diese Zahlen? Was fällt hier auf?

(d) Untersuche 3+3+... analog für die Endziffern 5 und 8 und 3.

(e) Untersuche analog 6+6+... für die Endziffern 2,3 und 4.

Zur Festlegung des Einmaleins ist das Vorgehen analog wie bei der Addition. Für eine feste 1x1-Reihe wird der Operator programmiert. Es folgen Tauschaufgaben und Umkehraufgaben. Für zusammengehörige 1x1-Reihen (z.B. 2;4;8 oder 5;10 oder 3;6;9) stehen mehrere als Operator programmierte Taschenrechner in Gruppenarbeit zur Verfügung.

Allmählich wird der Reiz-Reaktions-Mechanismus gefestigt. Auch langsamere Schüler rechnen nun schneller im Kopf als mit dem TR. Trotzdem sollte der TR bei Spielen und von schwachen Schülern zur Kontrolle verwandt werden, um den Motivationsverlust beim sturen Trainieren ein wenig zu überwinden. Jeder Schüler kann also den TR auf Verlangen erhalten, aber es darf kein Zwang bestehen, ihn zu benutzen.

### 3.1.3 Probierverfahren

Aufgabe 4

Finde Lösungen

(a) $\square . 3 = 1$, (b) $50 < \square . 4 < 55$,

(c) $\square . 7 = 91$, (d) $\square \, . \, \_\_ = 24$

Aufgabe 5

(a) Welches ist die größte Zahl, für die $\square . 11 < 90$ gilt?

(b) Welches ist die kleinste Zahl, für die $\square . 3 > 50$ gilt?

Aufgabe 6

(a) Programmiere .15 . Mit welcher Eingabe kommt man dann zum ersten Mal über 100?

(b) Programmiere +25 . Mit welcher Eingabe erreicht man die Ausgabe 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000?

(c) Wer nennt mal eine Aufgabe aus bekannten Zahlen mit einem Ergebnis in den Zweihundertern?

(d) Berechne 18.18= und suche bei den folgenden Aufgaben Zahlen, die diesem Ergebnis möglichst nahe kommen: $19.\square =$, $17.\square =$, $20.\square =$.

(e) Verknüpfe die Zahlen 54 und 18 mit allen vier Rechenzeichen und streiche an, welche der folgenden Zahlen als Ergebnisse in Frage kommen: 3,4,6,24,32,36,72,180,540,720,942.

(f) Zu welchen der folgenden Zahlen findest Du eine zweite Zahl, so daß das Multiplikationsergebnis 240 ist: 1,2,3,4, 5,6,7,8,9,10,15,20,25,30,35,40,45,50.

### 3.1.4 Zusammenfassung

Kopfrechenfertigkeiten werden benötigt für einfache Rechenaufgaben, für Überschlagsrechnungen und zur Durchführung schriftlicher Rechenverfahren. (Auf die Bedeutung des Kopfrechnens für die Entwicklung eines Zahlgefühls gehen wir später ein.) Nach dem Ökonomieprinzip kann nur der gezielte Wettkampf gegen den TR zu einer Erhöhung der Unabhängigkeit vom TR führen.

### 3.2 Schriftliche Rechenverfahren

Der Unterschied der Rechentechniken "Schriftlich" oder "TR" liegt in den zugrunde liegenden Algorithmen, dem Verständnis dieser Algorithmen, dem Grad der Mechanisierung und der Zuverlässigkeit der Anwendung. Bei Anwendungsaufgaben sind Mindestanforderungen an Mechanisierung und Zuverlässigkeit zu stellen, während das (bewußtgemachte) Verständnis des Algorithmus in diesem Zusammenhang eher störend als förderlich ist. Für den Schulungsteil ergeben sich keine unterschiedlichen Bewertungen (abgesehen vom Zeitaufwand): TR-Training und Papier- und Bleistifttraining sind gleichermaßen abstrakt. Trainiert werden syntaktische Fertigkeiten, nicht notwendig gekoppelt mit Verständnis.

Im Hinblick auf Rechnen als Fertigkeit spricht nichts mehr für die schriftlichen Rechenverfahren. Und alle Argumente, die gegen den TR angeführt werden, lassen sich durch schriftliches Rechnen nicht entkräften. Dieses wird in die Rolle einer Pferdekutsche gedrängt, die nur noch von Liebhabern gefahren wird oder im Notfall, wenn das TR-Auto versagt. (Wie uns die Erfahrung mit Computern lehrt, wird allerdings gar nicht gefahren werden bis das TR-Auto wieder flott ist). Die Frage nach dem Unterrichtsanteil der schriftlichen Rechenverfahren muß also neu beantwortet werden. Wir schlagen dazu folgende Schwerpunkte vor.

3.2.1 Können sich schriftliche Turmaufgaben in Addition und Subtraktion gegen den TR behaupten? (Hier ist der Tipp-Aufwand beim TR relativ hoch im Vergleich zu den benötigten Additionsfertigkeiten).

3.2.2 Können sich schriftliche Multiplikationsaufgaben einer mehrstelligen Zahl mit einer einstelligen Zahl gegenüber dem TR behaupten?

3.2.3 Läßt sich das Prinzip der schriftlichen Multiplikation mit Hilfe des TR so erlernen, daß beim Ausfall des TR Multiplikationsaufgaben mehrstelliger Faktoren unter Einbeziehung der Fertigkeiten 3.1.1 und 3.1.2 auch schriftlich gelöst werden können?

#### 3.2.4 Zusammenfassung

Durch die Verlagerung der Schwerpunkte läßt sich die Abhängigkeit vom TR in Grenzen halten. Ungelöst bleibt die Frage, welche TR-freie Alternativen es für das schriftliche Divisionsverfahren gibt.

## 4. TR und Rechensicherheit

Für unsere Adressaten sind Zahlen im wesentlichen Maßzahlen für Größen. Überall dort, wo wir diesen Hintergrund durch zu wenig Anwendungsbezug oder durch zu starke Formalisierung verdecken, verunsichern wir den Schüler. Er benötigt noch vielerlei Deutungen und Interpretationen und hier kommt es zum Widerspruch im Zahlbegriff.

### 4.1 Analog-digital

Maßzahlen von Größen sind analoge Daten. Die Genauigkeit einer Maßzahl hängt nur von der Präzision des Meßverfahrens ab. Maßzahlen haben selten mehr als vier aussagekräftige Ziffern. Größenordnungen sind wichtiger als lange Ziffernkolonnen. Bei Maßzahlen besteht kein wesentlicher Unterschied z.B. zwischen 120 und 121. Die Ziffernschreibweise ist nur eine zum Zwecke der einfacheren Kommunikation erfundene technische Notation, sie macht aus den Maßzahlen noch keine digitalen Daten. Bruchzahlen, Dezimalzahlen, rationale Zahlen, irrationale Zahlen, dies alles sind Zahlen aus einer fremden Welt, die so lange isoliert nebeneinander stehen, wie ihr Bezug zu Maßzahlen unsichtbar bleibt. (Vor allem, wenn sie auch noch in getrennten Kapiteln unterrichtet werden).

TR-Zahlen sind dagegen digitale Daten. Mit dem TR werden Ziffernfolgen nach syntaktischen Regeln verarbeitet. Das Vergessen einer Ziffer, das doppelt Tippen einer Ziffer, das Verschieben des Dezimalpunktes oder das Drücken einer falschen Funktionstaste wird kaum registriert. Und da das Ergebnis wie erwartet eine Zeichenkette ist und der TR bekanntlich sehr zuverlässig arbeitet, wird eine Fehlermöglichkeit gar nicht in Erwägung gezogen. Erst die Interpretation des digitalen Ergebnisses als analogen Wert, den man mit Erfahrungswerten vergleichen kann, oder aber auch der Vergleich des digitalen Ergebnisses mit einem zweiten digitalen Ergebnis, das man über eine Kontrollrechnung erhält, ermöglichen die Erkennung eines Fehlers.

### 4.2 Kontrollrechnungen

Auch bei der Benutzung des Taschenrechners treten häufig Fehler auf. Kontrollrechnungen sind deshalb weiterhin notwendig, obwohl es uns trotz größerer Bemühungen in der Vergangenheit eigentlich nie gelungen ist, unsere Schüler von der Notwendigkeit von Kontrollrechnungen so zu überzeugen, daß sie diese auch ohne den

Lehrer im Rücken regelmäßig durchführen. Wenn wir deshalb nun erneut Kontrollrechnungen bei TR-Aufgaben verlangen, so wollen wir unsere Vermutungen über die bisherigen Mißerfolge zusammenfassen und Hilfen vorschlagen.

4.2.1 Psychologische Gründe

Der logische, deterministische, vollkommene Kalkül der Mathematik erfordert keine Kontrollrechnungen. Diese sind notwendig wegen menschlicher, persönlicher Fehlleistungen. Die Aufforderung zu regelmäßigen Kontrollrechnungen ist deshalb eine Aufforderung, systematisch an sich selbst zu zweifeln. Dies steht im Widerspruch zum Erziehungsziel "Selbstbewußtsein", das gerade im Mathematikunterricht sehr gefördert wird, wo man auch gegen große Mehrheiten "beweisen" kann, daß man im Recht ist. Der Widerspruch zwischen vollkommener Mathematik und vollkommenen menschlichen Leistungen läßt sich jedoch nicht abbauen. Nach unserer Meinung kann die Bereitschaft für Kontrollrechnungen gesteigert werden durch das gründlichere Bewußtmachen dieses Widerspruchs.

4.2.2 Überschlagsrechnungen

Der psychologisch bedingte Widerstand verstärkt sich noch. Wo die Mathematik doch präzise genau ein exaktes Ergebnis liefert, soll ich zusätzlich noch ein schlechteres, mathematisch betrachtet sogar falsches Ergebnis liefern? Hier scheint uns Abhilfe in zweierlei Richtung möglich. Einmal kann die Durchführung von Überschlagsrechnungen erleichtert werden, z.B. durch bessere Kopfrechenfertigkeiten oder ein besseres Zahlgefühl, zum andern wird der genannte Widerspruch reduziert durch die Interpretation des Überschlagsergebnisses als analoge Daten. (Wir würden auch im Gegensatz zur heutigen Praxis sehr viele Aufgaben nur durch eine Überschlagsrechnung ohne eine exakte Berechnung lösen lassen, um so die Abhängigkeit vom TR zu reduzieren und den Blick mehr auf die Anwendungen der Mathematik zu lenken).

4.2.3 Schätzen

Hier wird ein Gefühl für analoge Daten, für Maßzahlen verlangt. Je interdisziplinärer der Mathematikunterricht ist, desto sicherer können die Schüler Ergebnisse abschätzen. Und da sich der Zahlenstrahl auch als Bandmaß, d.h. als Größenbereich betrachten läßt, ist ein erhöhtes Zahlgefühl (als Längen-Gefühl) zusätzliche Hilfe beim Schätzen.

### 4.3 Zahlgefühl

Entsprechend der Unterscheidung analog-digital unterscheiden wir zwei Arten von Zahlgefühl (Zahlgefühl sehen wir als spontanes Bewußtsein von geeigneten Beziehungen im Zahlraum, intuitiv ausgewählt durch den vorausgehenden "Stimulus").

#### 4.3.1 Syntaktisches Zahlgefühl

Das sytaktische Zahlgefühl basiert auf dem Auswendigwissen mathematischer Fakten (Einmaleins, Einspluseins, Teilbarkeitseigenschaften, Anordnungseigenschaften, Stellenwerteigenschaften,...). Es wird stark gefördert durch große Kopfrechenfertigkeiten (Reiz-Reaktions-Mechanismus). Beispiel: Bei 4x5=200 kommt die spontane Reaktion "4 mal 5 ist doch zwanzig".

#### 4.3.2 Semantisches Zahlgefühl

Das semantische Zahlgefühl basiert auf Interpretation und Vergleich. Notwendig ist hier ein Größenordnungen und Funktionen betonendes Wissen. Beispiel: Bei 4x5=200 kommt die spontane Vorstellung "4 mal die Länge 5 (Funktionengefühl) ist doch niemals die Länge 200 (Gefühl für Größenordnungen bei Längen)". Wegen der Darstellung der Zahlen auf dem Zahlenstrahl bevorzugt das semantische Zahlgefühl den Längenvergleich, bei Anwendungsaufgaben in anderen Größenbereichen versagt diese Art von Zahlgefühl eventuell.

#### 4.3.3 Verlust von Zahlgefühl

Die Forderung nach mehr problem- oder anwendungsorientiertem Mathematikunterricht kann auch gesehen werden als Bewegung gegen die Vernachlässigung des semantischen Zahlgefühls durch verstärkte Formalisierungen. (In diesem Zusammenhang muß auch auf die erhöhte Bedeutung graphischer Darstellungen hingewiesen werden).
Es ist deshalb äußerst bedauerlich, daß immer mehr Meßinstrumente nicht mehr als Zeigerinstrumente, sondern mit Digitalanzeigen hergestellt werden (Zeigerwaage aus Tante Emmas Laden, Rundwaage auf dem Markt, physikalische Meßinstrumente, Armbanduhren).

Scheinbar sind Digitalanzeigen für den Benutzer eine Erleichterung, da dieser sich die Interpretation und die Umwandlung von analog nach digital erspart. In Wirklichkeit aber sind sie eine Verarmung an Fähigkeiten, die im Sinne eines Regelprozesses notwendig sind zur Vermeidung von Fehlern. Wozu hat man z.B. bei Tonbandgeräten zur Aussteuerungskontrolle noch Zeigerinstrumente mit farbigen

Skalenteilen, oder weshalb gibt es den Geschwindigkeitsmesser beim Auto noch immer nur als Zeigerinstrument?

Wir raten deshalb dringend ab vor dem Kauf von Digitaluhren (mindestens) für Schulkinder. Zeitpunkt und Zeitdauer, Anfang und Ende, alles macht die ikonische Zeigeranzeige sichtbar auf einen Blick. Was bedeutet es dagegen für ein Kind, das um 16 Uhr zu Hause sein soll, wenn die Digitaluhr 15.58 anzeigt? Die Digitalanzeigen beschwören die Gefahr herauf, daß wir das Gefühl verlieren für eine der wichtigsten mathematischen Funktionen, die Proportionalität.

## 5. Schulung des Zahlgefühls

Das amerikanische CSMP-Projekt für die Primarstufe scheint uns besonders geeignet zur Verbesserung des Zahlgefühls. Wir bringen deshalb zunächst einige Aufgaben aus diesem Projekt. Anschließend folgen weitere Aufgaben, meist Spiele mit dem TR, durch die ebenfalls eine Schulung des Zahlgefühls stattfindet.

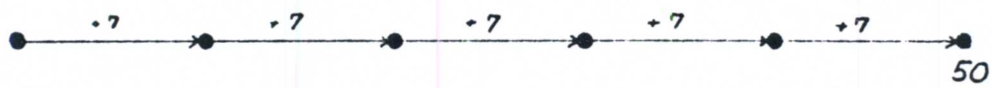
### 5.1 Mathematik mit Pfeilen

Aufgabe 7

Beschrifte die Punkte und kontrolliere ggf. mit dem TR.
(Analoge Aufgaben mit Dezimalzahlen)


Aufgabe 8

Beschrifte die Punkte und probiere ggf. mit dem TR.
(Analoge Aufgaben mit Dezimalzahlen)

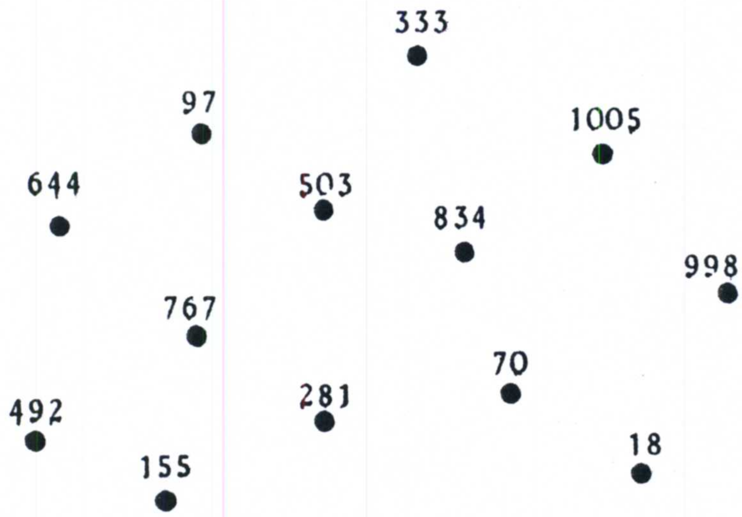



Aufgabe 9

Gehe von 7 nach 100, zeichne Dein Pfeilbild. (Erlaubt sind alle 4 Grundrechenarten, aber nur einziffrige Zahlen). Wieviele Schritte brauchst Du? Kannst Du auch mit weniger Schritten auskommen?

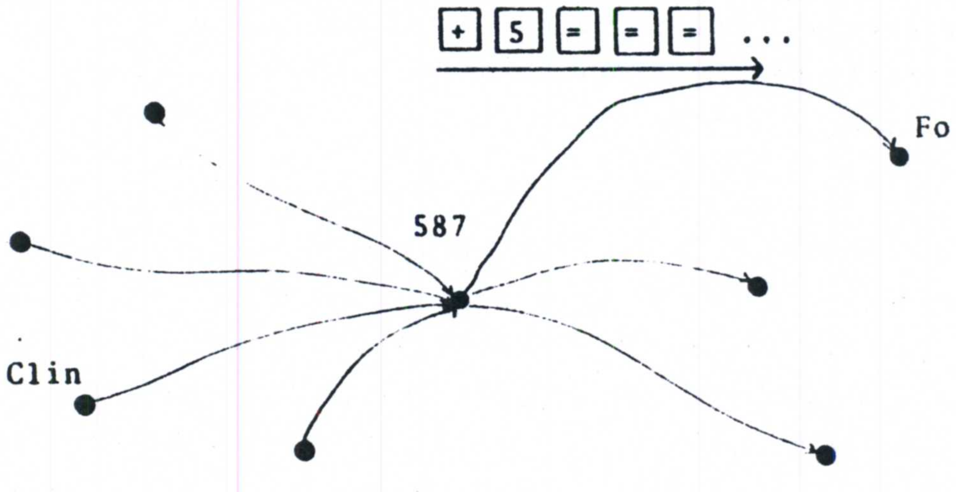
Aufgabe 10

Benutze den TR und zeichne alle Pfeile für $\boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ ...



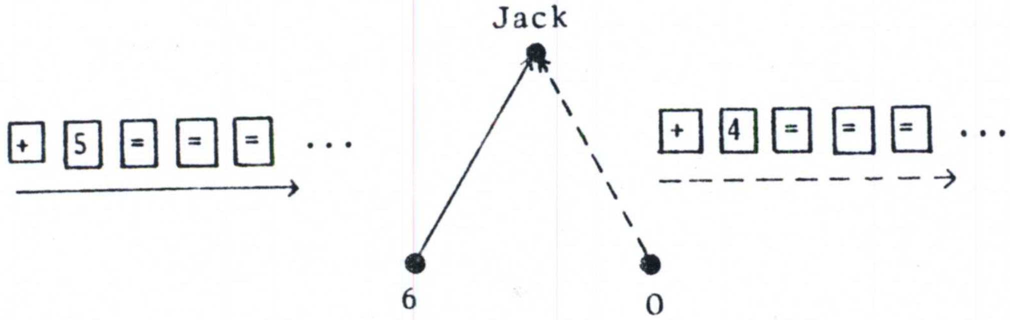

Aufgabe 11

Beschrifte die Punkte. Was fällt auf? Welches ist die kleinste positive (größte negative) Zahl, die Clin sein könnte? Welches ist die kleinste Zahl über 1000, die Fo sein könnte? (Analoge Aufgaben mit Dezimalzahlen).




Aufgabe 12

Welches ist die kleinste Zahl, die Jack sein kann? Welches wäre die nächste Zahl für Jack? Und die nächste? Erkläre!




Aufgabe 13
Welche Zahlen erreichen wir durch Kombinationen von [+] [3] [=] [=] [=] ... und [-] [8] [=] [=] [=] ..., wenn wir bei 7 (3,0,512,-83,...) starten? (Analog für [+] [4] [=] [=] [=] ... und [-] [6] [=] [=] [=] ...).

5.2 TR-Spiele

Aufgabe 14
Wer hat die geringste Anzahl an Versuchen: Zur Ausgangszahl a ist ein Faktor b so zu schätzen, daß das Produkt axb (=c) mit einer vorgesehenen Zielzahl übereinstimmt oder in einem vorgegebenen Zielintervall liegt. Führte die Wahl von b nicht zum Erfolg, so ist das Verfahren zu wiederholen, wobei an die Stelle von a jetzt c als Ausgangszahl tritt und Zielzahl bzw. -intervall unverändert bleiben. (Statt mit Multiplikationen kann das Spiel auch mit Additionen durchgeführt werden).

Aufgabe 15
Die große EINS: Bei diesem Partnerspiel tippt der Banknachbar nicht sichtbar für seinen Kameraden [a] [÷] [a] [=] in einen TR mit automatischer Konstante. Der zweite Schüler versucht jetzt a zu erraten durch [$a_1$] [=], wobei $a_1$ seine erste Ratezahl ist. Das Ergebnis gibt ihm Hinweise für eine verbesserte Wahl der Ratezahl. (Variante ist das Spiel "die große NULL", wo mit [a] [-] [a] [=] begonnen wird).

Aufgabe 16
Das Faktorenspiel: Auf dem Overheadprojektor liegt ein Transparent mit den Zahlen 1 bis 32 (oder anderen Zahlen). Die Klasse ist in zwei Gruppen eingeteilt. Gruppe A beginnt und wählt eine Zahl der Folie. Sie wird für diese Gruppe als Punktzahl eingekreist. Sämtliche Teiler dieser Zahl werden als Punktzahlen für

Gruppe B eingekreist. Dann wählt B eine Zahl und A erhält deren Teiler. Eingekreiste Zahlen werden nicht noch einmal vergeben. Wenn alle Zahlen eingekreist sind, werden die Punkte zusammengezählt.

Aufgabe 17
BINGO: Vorgegeben ist eine Zahlenmatrix mit 4x4 oder 5x5 Lösungszahlen und eine Sammlung mit entsprechend vielen Aufgaben. Zu jeder Lösungszahl ist die zugehörige Aufgabe so auszuwählen, daß möglichst schnell die Aufgaben für eine ganze Spalte oder für eine ganze Zeile gefunden sind.

Aufgabe 18
Zwei Schüler legen abwechselnd Spielsteine auf einen Spielplan, auf dessen Feldern Zahlen stehen. Bei drei Steinen gleicher Farbe in einer Reihe werden die Zahlen der besetzten Felder aufaddiert (multipliziert) und als Gewinnpunkte registriert.

### 5.3 Weitere Aufgaben

Aufgabe 19
Füge die richtigen Rechenzeichen ein, der TR darf benutzt werden:
(a) 3,2 ○ 5 ○ 20 = 0,8
(b) 7,5 ○ 2 ○ 10 = -0,5
(c) 7 ○ 2,5 ○ 4 = 5,5

Aufgabe 20
Wir gehen aus von der Startzahl Null. Erlaubt sind nur Additionen von 7 oder von 3, beliebig häufig in beliebiger Reihenfolge. Welche Zahlen erreichen wir auf diese Weise <u>nicht?</u>

Aufgabe 21
Bilde aus 5 verschiedenen vorgegebenen Ziffern zwei Zahlen, deren Produkt maximal (minimal) ist. Wie sieht die Antwort bei 4 Ziffern, bei 6 Ziffern oder bei Zahlen mit gleichen Ziffern aus?

Aufgabe 22
Erzeuge die Zahl a in der Anzeige, wobei nur bestimmte Tasten erlaubt sind. Verschärfung: Jeder Tastendruck kostet 1 Pfennig, mache es so billig wie möglich.

Aufgabe 23
Wir gehen aus von der Startzahl 0 (oder A). Erlaubt sind nur

Additionen von b und Subtraktionen von c, beliebig häufig in beliebiger Reihenfolge. Welche Zahlen erreichen wir für b=7 und c=10, b=6 und c=8, b=4 und c=20,...?

Aufgabe 24
Die Schüler erhalten ein Arbeitsblatt mit 40 Aufgaben, zu lösen im Kopf. Die Arbeitszeit reduziert sich entsprechend dem Trainingserfolg von anfangs 5 Minuten pro Arbeitsblatt auf schließlich 1 Minute pro Blatt. (Erfolgreiches Trainingsprogramm in Philadelphia).

## 6. Schätzen und Überschlag

### 6.1 Schätzen
Wir unterscheiden zwischen Schätzen und Überschlagen. Schätzen geschieht unter Zuhilfenahme von Vergleichen mit bekannten "analog"-Daten (Ergebnissen oder Größen). Hierzu muß die Bedeutung der Fragestellung erfaßt werden und es müssen außermathematische Interpretationen durchgeführt werden. Schätzen sollte nur vor der Berechnung erfolgen.

### 6.2 Überschlagen
Um eine Überschlagsrechnung durchführen zu können, muß die Struktur der Aufgabe bereits bekannt sein. Die Aufgabe wird dann gelöst durch Rechnen mit gerundeten Zahlen. Typische Formulierungen: Mache zuerst eine Überschlagsrechnung, oder (nach dem Aufschreiben des Ergebnisses): Überprüfe das Ergebnis durch eine Überschlagsrechnung.

### 6.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 25
Jeder Schüler erhält ein Arbeitsblatt mit Blöcken aus (z.B.) je 8 Antwortzahlen $y_i$ und einer Zielzahl z. Der Lehrer zeigt eine weitere Zahl a für wenige Sekunden und der Schüler kreist diejenige Zahl $y_i$ an, die seiner Meinung nach die Gleichung $y+a=z$ am besten erfüllt. Exakte Lösungen sind nicht immer vorhanden. (Analog für die Multiplikation $y\times a=z$).

Aufgabe 26
Jeder Schüler erhält ein Arbeitsblatt mit (z.B.) 9 Feldern und 9 Lösungszahlen. Der Lehrer liest zu jedem Feld eine Aufgabe vor. Der Schüler trägt daraufhin in das Feld gemäß Schätzen und Über-

schlag eine der Lösungszahlen ein. (Die Art der Aufgaben ist völlig frei, die "Lösungs"-zahlen brauchen auch nur Näherungswerte zu sein gemäß der Frage "Welche der vorgegebenen Zahlen kommt der Lösung am nächsten?" (Auch als Einzelarbeit geeignet, vgl.BINGO).

Zur Verbesserung der Fähigkeit "Schätzen können" sind umweltorientierte Aufgaben verstärkt zu bearbeiten. Hierzu sind die Daten zuerst zu sammeln und anschließend Fragen der Art "Wie weit..., wie tief..., wie schnell..., wie hoch..., wie teuer..., wie dick..., wie viele...?" zu beantworten. Wir deuten dies in Aufgabe 27 nur an.

Aufgabe 27

(a) Wie oft schlägt Dein Herz in der Minute, am Tag, im Jahr,...?
(b) Wann bist Du 1000, 10.000, 100.000,... Sekunden alt?
(c) Wann ist das Jahr 2000 Minuten alt, wann 200.000,...?
(d) Wie lang ist eine Kette von 100, 1000, 10.000,... Markstücken?
(e) Wie hoch ist ein Turm von 100, 1000, 10.000,... Fünfmarkstücken?
(f) Wie lange dauert es, um Papier zu zerreißen, so daß jeder Einwohner der Stadt, des Landes,... ein Stück erhält?
(g) Wieviele Blätter Papier benötigt man für 1kg, wie dick ist dieses Paket, was kostet es?
(h) Wieviele Schritte brauchst Du für einen Kilometer, für den Schulweg, innerhalb der Schule, beim Fußballspielen,...?

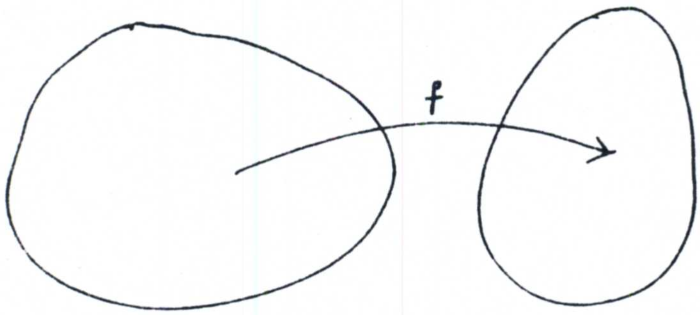
## 7. TR und Funktionsbegriff

Sprechen, Schreiben, Lesen, Radfahren, Schwimmen, Autofahren, Schreibmaschine-Tippen, TR-Tippen, alles lernen wir durch Versuch und Irrtum, durch Raten und Überprüfen, d.h. durch Probieren. Dies trifft auch zu für die schriftlichen Rechenverfahren, für die Potenzgesetze, für das Rechnen mit Brüchen, für die Potenzrechnung usw., auch wenn der Lehrer sich noch so viele Mühe beim Erklären gegeben hat. Die Übung macht den Meister. Und wenn wir eine Regel oder eine Gesetzmäßigkeit mal vergessen haben, dann gehen wir eine Abstraktionsstufe (auf der Bruner-Spirale) zurück und versuchen es wieder mit Beispielen, mit Probieren.

Betrachten wir aus dieser Sicht den Funktionsbegriff, so bringt der TR eine entscheidende Veränderung. Mit dem TR lassen sich Funktionen simulieren. Der Schüler hat jetzt die Möglichkeit, mit Versuch und Irrtum, durch Raten und Überprüfen, d.h. durch Probieren sich die betreffende Funktion selbst zu erarbeiten. Im Sinne des Spiralprinzips wird eine (bisher fehlende) Stufe eingeschoben. Das Erklären und Verbalisieren erfolgt auf einem reicheren Erfahrungsschatz, auf den man beim Vergessen der Regel oder der Eigenschaft erfolgreicher zurückgreifen kann. Wir werden hierzu später Beispiele anführen und zunächst das Konzept allgemeiner darstellen.

## 7.1 Der TR als Funktionsmaschine

Die höhere Mathematik beschreibt eine Funktion als eine Menge von Wertepaaren (Teilmenge einer Produktmenge), im elementaren Mathematikunterricht wird eine Funktion als "Zuordnungsvorschrift" bevorzugt:




$(x_1, y_1)$
$(x_2, y_2)$
$(x_3, y_3)$
$\vdots$

Vorschrift oder Wertepaare

Durch das Maschinenmodell sollen diese beiden Auffassungen "gekoppelt" werden:

Eingabe Maschine Ausgabe


$$x_i \xrightarrow{f} y_i$$

Ohne viele Beispiele, d.h. ohne den TR war dies bisher nur unvollkommen möglich. Erst der TR als Funktionsmaschine stellt den Zusammenhang her zwischen der statischen und der dynamischen Auffassung. Der TR realisiert Operatoren (Stretcher x6 , Shrinker :4 , Übertragungsfunktionen +7 ), Quadrierer $x^2$ , aber auch - am besten in Teamarbeit - Verkettungen ( x6 x4 , x6 :2 , x7 :4 , x18 +32 ) oder Abbildungen:

$$x \xrightarrow{+3} x'$$
$$y \xrightarrow{-2} y'$$

### 7.2 Das Prinzip der Einbahnstraße

Eingabe E, Vorschrift f und Ausgabe A bilden als Einheit (E,f,A) die Idee der Funktion. Nach dem operativen Prinzip läßt sich diese Einheit nur erfassen, wenn man alle drei "Variablen" einzeln variiert. Ein volles Verständnis für die Funktion ist also erst dann erzielt, wenn nicht nur die Aufgabenform

E, f gegeben, gesucht ist A,

sondern auch die Aufgabenform

A, f gegeben, gesucht ist E und

E, A gegeben, gesucht ist f

mit demselben (!) TR-Ablauf bearbeitet werden. Hierzu ist zu probieren, die Funktion wird simuliert. Durch trial and error wird die Funktion schrittweise erarbeitet. Die falsche Ausgabe A gibt eine unmittelbare Rückkopplung für die verbesserte Wahl der gesuchten Eingabe E (oder der gesuchten Vorschrift f), und erst dadurch werden die drei Bestandteile wirklich in Zusammenhang gebracht: Es entwickelt sich ein Gefühl für die Funktion. Natürlich wäre es hierbei völlig verkehrt, mit Hilfe algebraischer Umformungen rückwärts zu rechnen. Dies zerstört die Einheit (E,f,A) und verbaut den Zugang zu dem Gefühl, was die Funktion eigentlich leistet. Deshalb muß die Richtung $x_i \xrightarrow{f} y_i$ beibehalten werden, was wir das Prinzip der Einbahnstraße nennen wollen.

### 7.3 Einfache Beispiele

Wir verweisen zunächst auf die Benutzung des TR als Operator. Das wichtigste Beispiel für den Unterricht ist jedoch die Proportionalität. Wir simulieren eine Benzinuhr, eine Waage auf dem Wochenmarkt, Geschwindigkeitsmesser, Computerwaagen und physikalische Meßinstrumente. Es dauert erstaunlich lange, bis die Schüler bei den Probierverfahren für die Anwendungssituationen von sich auch nach der Umkehrfunktion suchen, die ihnen theoretisch bereits seit langem bekannt ist. Die Schüler zeigen damit, daß der Kalkül nicht mit Anwendungssituationen verbunden war.

Die "Berechnung" von $\sqrt{x}$ ohne Wurzeltaste ordnet sich ganz in dieses Prinzip ein. Ausgehend von einem Schätzwert, den man quadriert, erhält man eine Näherungslösung, die unmittelbare Rückmeldung gibt für die verbesserte Wahl des nächsten Schätzwertes.

## 8. Prozentrechnung

Wir wollen die so vielfach abgelehnte Prozenttaste des TR verteidigen und einen von uns erprobten Kurs vorschlagen. Benutzt wurden TR, die bei der Aufgabe "635DM + 6% = ?" für die TR-Lösung die Tastenfolge $\boxed{6}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{\%}\ \boxed{=}$ erfordern, wobei vor dem Drücken der Gleichheitstaste das Zwischenergebnis "6% von 635" angezeigt wird.

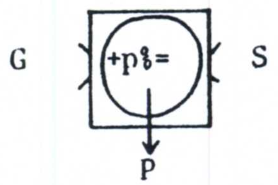
### 8.1 Vermehrter und verminderter Grundwert

Bei der Prozentrechnung liegt eine komplexere Funktion vor, die viele Erwachsene nicht in ihrer Allgemeinheit meistern können:


Unsere Schüler entwickelten ein vorzügliches Gefühl für diese Funktion und konnten - ohne TR und ohne einen algebraischen Formelapparat - alle drei Aufgabenarten (S gesucht, G gesucht bzw. p gesucht) durch die Angabe von guten Näherungswerten "lösen", auch bei "S gesucht".

### 8.2 Die drei Grundaufgaben

Im zweiten Teil des Kurses konzentrierten wir uns dann auf die Anzeige des Zwischenergebnisses P:




Die Größe S wurde weiterhin mitgeschleppt, bis die Schüler von sich aus darauf verzichteten. (Womit wir das "Schema" der alten Funktion erweiterten und keine eigentlich neue Funktion einführten). Die neue TR-Funktion $G \xrightarrow{+p\%} P$, die merkwürdigerweise mit der TR-Funktion $G \xrightarrow{-p\%} P$ übereinstimmte, wurde analog operativ nach dem Prinzip der Einbahnstraße mit gleichem Erfolg bearbeitet.

### 8.3 Vertiefung

Der dritte Teil des Kurses wurde eingeleitet von einem Schüler, der durch die Vorübungen "TR als Operator" bereits ein ausreichendes Gefühl für Proportionalität erreicht hatte: "Auf das Plus oder Minus (in "+p%" bzw. "-p%") kommt es gar nicht an! Das muß hier "Mal" heißen!" Und sehr schnell war bei allen Schülern aufgrund der Vorübungen (vgl. 7.3) der Faktor gefunden: "$\times\frac{p}{100}$". Es war jetzt keine Schwierigkeit mehr, auch für "+6%=" oder "-5%=" die Operatoren zu finden (x1.06 bzw. xo.95) und diese Ergebnisse zu verallgemeinern.

Fassen wir dieses Beispiel zusammen, so wird durch den TR das Einschieben von mehreren Stufen im Brunerschen Spiralprinzip ermöglicht. Am Ende der eingeschobenen Stufen steht der Schüler an der Stelle, wo vorher die Starlöcher waren. Er hat jetzt aber, wenn er den Kalkül und die Abhängigkeiten nicht mehr beherrscht, die Möglichkeit schrittweise zurückzugehen, notfalls zurück bis zur Stufe, wo die Lösung der Aufgabe durch ihre Formulierung in der Umgangssprache unmittelbar in den TR eingetippt werden kann: "635DM + 6% =?" Sämtliche Aufgaben der Prozentrechnung reduzieren sich damit auf diese eine einzige Tippfolge, die der Umgangssprache vollständig entspricht. Und nirgendwo ist der Weg verbaut für alle die Ziele, die heute mit der Prozentrechnung verbunden sind.

## 9. Ausblick

Wir haben uns hier beschränkt auf die Problematik des TR-Einsatzes. Probleme sahen wir dabei im wesentlichen nur beim Einsatz als methodisches Hilfsmittel, in den Auswirkungen auf die Fertigkeit Rechnen und in der kritiklosen Übernahme der Ergebnisse. Natürlich ist der TR besonders am Ende der Sekundarstufe I und in der Sekundarstufe II hauptsächlich ein mächtiges Rechenhilfsmittel, das nach Meinung aller Fachleute den Rechenstab und das Logarithmenrechnen vollständig verdrängen wird. (Diese Techniken spielten im Alltag und Berufsleben sowieso gegenüber Rechenmaschinen und Computern nie eine größere Rolle). Beim Rechenstab lag die Problematik bei der Skalenablesung und bei der Überschlagsrechnung, die Daten wurden bereits in analoger Form verarbeitet. Durch die Verschiebung zur digitalen Darstellung der Daten ergibt sich beim TR die erhöhte Notwendigkeit der Interpretation und damit die Notwendigkeit des sinnvollen Rundens und ebenfalls der Überschlagsrechnung, hier jedoch zur begleitenden Kontrolle.

Zusätzlich zu den vier Grundrechenarten, wovon die Strichrechnung mit dem Rechenstab gar nicht möglich war, und den Funktionstasten $\boxed{x^2}$ und $\boxed{\sqrt{\phantom{x}}}$, auf die wir unter dem Stichwort "einfache" TR bereits eingegangen sind, haben nicht programmierbare "wissenschaftliche" TR (analog zum Rechenstab) noch Tasten für trigonometrische und logarithmische Funktionen einschließlich Umkehrfunktionen.

Für die Erarbeitung dieser Funktionen ist der TR ein ausgezeichnetes Hilfsmittel. Er dient, wie in Abschnitt 7 ausführlich beschrieben, sowohl zur Kopplung des statischen und dynamischen Funktionsbegriffs, als auch besonders wirkungsvoll mit Hilfe des Prinzips der Einbahnstraße zur operativen Erfassung der einzelnen Funktionen, der gegenseitigen Zusammenhänge und der Problematik der Umkehrfunktionen.

Eine konsequente Ausnutzung des Prinzips der Einbahnstraße bringt hier überdies die Mathematik wieder stärker in den Bereich der Anwendungen, nämlich der emphirischen Analyse von Datenmengen. Die Frage nach der zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeit, d.h. die Frage nach der gesuchten "Funktion", gewinnt an Gewicht natürlich erst dann, wenn auch nicht lineare Funktionen einbezogen sind. Der TR ermöglicht es, Hypothesen schnell durchzurechnen und so zu bestätigen oder zu widerlegen. Fehlversuche geben dabei, in Zusammenhang mit graphischen Darstellungen, unmittelbare Rückkopplung für verbesserte Vermutungen. Maßstabsänderungen und Translationen werden dabei wie selbstverständlich mit einbezogen und führen so zu einem vertieften Verständnis des Abbildungsbegriffs. Die Diskussion der Approximation von Funktionen durch Polynome gewinnt an Bedeutung, vor allem wenn die Polynomfunktionen schnell programmiert und dann mit einfachem Tastendruck abgerufen werden können.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß durch den Einsatz des TR im Mathematikunterricht zwar eine Verlagerung der Schwerpunkte, aber insgesamt eine Bereicherung an mathematischen Aktivitäten zu erwarten ist.

## 10. Literatur

Wir beschränken uns auf allgemein zugängliche Aufsätze und Bücher, die unmittelbar Anregungen für die Unterrichtsarbeit geben. Ergänzende Aufsätze mit TR-Anwendungen zu speziellen Themen findet man in fast allen mathematik-didaktischen Zeitschriften.

[1] Der Mathematikunterricht, Jahrgang 24 - Heft 1 - März 1978, Klett Verlag Stuttgart. (Das gesamte Heft ist dem Thema Taschenrechner gewidmet).

[2] Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 10 -

Heft 3 - 1978, Klett Verlag Stuttgart. (Dieses Heft und voraussichtlich auch Heft 4 - 1978 werden Analysis zum Thema Taschenrechner enthalten).

[3] Neue Unterrichtspraxis, Hefte 2/1977 (Seite 116-124) und 4/1977 (Seite 238-249), Schroedel Verlag Hannover. (In zwei Aufsätzen werden hier ausführlich Kriterien zur Auswahl von Taschenrechnern beschrieben).

[4] The Arithmetic Teacher, Vol. 23 - No. 7 - November 1976, National Council of Teachers of Mathematics, Reston Virginia USA. (Special Issue: Minicalculators).

[5] The Mathematics Teacher, Vol. 71 - No. 5 - May 1978, National Council of Teachers of Mathematics, Reston Virginia USA. (Special Issue - Computers and Calculators).

[6] H.Sieber, O.Fischer, F.Ebeling: Taschenrechner im Unterricht. Klett Verlag, Stuttgart 1978. (Rechenlogik, Arbeitsweisen, zahlreiche Tastfolgen als "Formelsammlung").

[7] A.Wynands, U.Wynands: Elektronische Taschenrechner in der Schule. Vieweg Verlag Braunschweig 1978. (Vielseitige Ideen und Anregungen für den sofortigen Gebrauch im Mathematikunterricht).

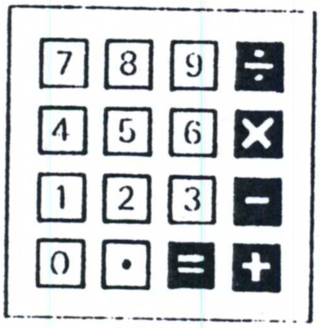



Abb. 1. Die Zehnertastatur